

УДК 538.56+621.373.8

А. Ю. ОКУЛОВ, А. Н. ОРАЕВСКИЙ

ДИСКРЕТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

1. Введение

В настоящее время для анализа движения нелинейных систем широко используют конечномерные отображения. В простейшем, одномерном случае они связывают, например, амплитуды колебаний, разделенные конечным интервалом времени (отображение Пуанкаре) [1]. Построение таких отображений проводится в основном численными методами [2]. Вместе с тем в ряде случаев их удается построить аналитически, как, например, для описания эволюции волнового пакета в генераторе на лампе бегущей волны с задержкой в цепи обратной связи [3—5], нелинейно оптического интерферометра [6, 7], кольцевого лазера с нелинейными потерями на генерацию гармоник, вынужденное рассеяние [8, 9] или нелинейную рефракцию [10]. Общим для этих нелинейных систем является циклический характер движения, когда импульс много раз проходит через нелинейный элемент, возвращаясь каждый раз на его вход после задержки в цепи положительной обратной связи (см. рис. 1). Естественным описанием такого процесса оказывается использование нелинейной «передаточной функции» f , которая находится либо экспериментально [11], либо выводится теоретически исходя из простых физических соображений (см. раздел 2). При этом многократным проходам импульса через систему соответствуют многократные итерации отображения f ; в этом случае оно представляет собой просто функцию одной переменной E_n с одним или несколькими максимумами

$$E_{n+1}(t) = f(E_n(t)), \quad (1a)$$

где $E_n(t)$ — форма импульса при n -м проходе, t — время.

Поскольку свойства итераций одномерных отображений с куполообразным максимумом в настоящее время изучены довольно подробно (см. раздел 3 и [12—14]), то представляется возможным не только легко рассчитывать эволюцию волнового пакета, но и делать весьма общие выводы о его структуре (см. раздел 4 и [8, 9]). Дело в том, что при итерациях отображения (1a) значения E_n стремятся к дискретному счетному множеству устойчивых значений. Соответственно этому первоначально гладкая огибающая волнового пакета, которая может быть также функцией пространственных координат $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, стремится к разрывной функции, значения которой совпадают с устойчивыми значениями отображения:

$$E_{n+1}(t, \mathbf{r}_\perp) = f(\mathbf{r}_\perp, E_n(t, \mathbf{r}_\perp)). \quad (1b)$$

При этом в зависимости от параметров системы (например, коэффициента усиления лазера в [8]) число устойчивых точек E_n отображения f может быть конечным или бесконечным, что соответствует регулярной или хаотической структуре волнового пакета (рис. 2, см. раздел 4). Здесь отметим, что при рассмотрении нелинейностей, изменяющих фазу поля E_n (например, самофокусировки), отображение (1b) становится двумерным [6, 7].

Тем не менее, как отмечалось ранее [3], такое простое описание имеет весьма ограниченную область применимости. В самом деле, запись формы, например, временной огибающей импульса при $(n + 1)$ -м проходе в виде уравнения (1а) подразумевает, что величина сигнала в момент t зависит только от ее значения в предыдущий момент $t - T$ (T — время задержки) и не зависит от ее значений в другие моменты времени (см. рис. 1). Отображение f (1а) в этом случае можно назвать локальным. Физически это означает, что нелинейный элемент является безынерционным, т. е. мгновенно отсле-

Рис. 1. Радиофизический генератор, состоящий из нелинейного элемента (лампы бегущей волны), описываемого отображением f , и линии задержки T

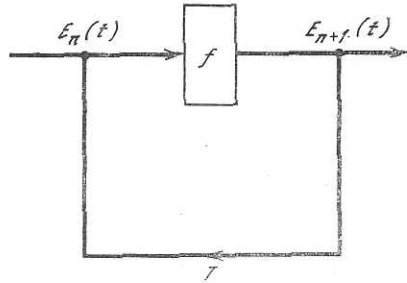
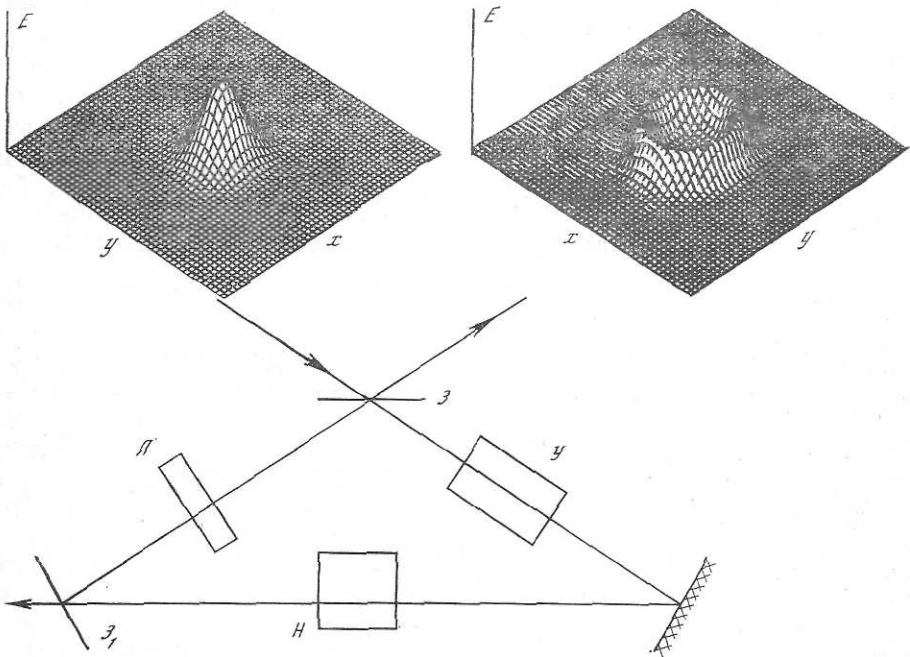


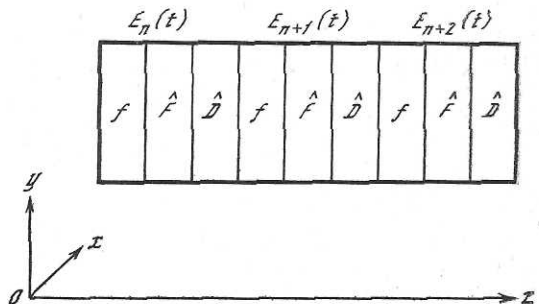
Рис. 2. Кольцевой лазер и распределения амплитуды электрического поля $E_{n+1}(t, r_{\perp})$ на входе и после одного прохода



U — двухуровневый усилитель; P — насыщающийся поглотитель; H — нелинейный элемент с пиковыми (растущими с мощностью) потерями на генерацию гармоник или стоксовых компонент, работает в синхронизме; Z — входное зеркало; Z_1 — зеркало, прозрачное для второй гармоники или стоксовой компоненты

Рис. 3. Слоистая среда (эквивалент кольцевого лазера рис. 2)

f — нелинейный слой; \hat{D} — диспергирующий слой; \hat{F} — воздушный промежуток с дифракцией. Прохождение трех слоев ($\hat{F} \hat{D} (y)$) соответствует одной итерации отображения (2б)



живает изменения поля $E_n(t)$. Учет инерционности означает введение конечной полосы пропускания, что естественно называть также дисперсией [15]. Этот учет проводится добавлением в чисто нелинейную бездисперсионную систему [9] (см. рис. 1) линейного диспергирующего элемента (линейного фильтра [3], см. также раздел 5). Уравнение (1а) переходит тогда в

$$E_{n+1}(t) = f(\hat{D}(E_n(t))), \quad (2a)$$

где \hat{D} — линейный оператор типа свертки, особенности которого описаны в [16]. Свойства итераций отображения (2а) в отличие от (1а) изучены к настоящему моменту весьма мало, что обуславливает отсутствие теории таких отображений. Упомянем здесь лишь результаты численного счета [17], где наблюдался переход от хаотических режимов к регулярным при медленном увеличении дисперсии, а также исследование универсальности и скейлинга при таких итерациях [16]. В разделе 5 описаны также нелинейные собственные функции для ряда отображений (2а), представляющие собой гладкие колоколообразные импульсы, проходящие через систему (рис. 1) без изменения формы, которая определяется типом нелинейности f .

При рассмотрении нелинейно оптических систем необходим учет дифракции. Действительно, если при малом числе проходов через систему поперечная структура волнового пакета остается гладкой и дифракцию в первом приближении можно не учитывать (см. рис. 2), то при большом числе проходов нарастают выбросы амплитуды и дифракция благодаря им становится существенной (см. раздел 4 и [6, 9, 18, 19]). Отображение (1б) принимает в этом случае вид (см. [6] и раздел 6):

$$E_{n+1}(t, \mathbf{r}_\perp) = f(\mathbf{r}_\perp, \hat{F}\hat{D}E_n(t, \mathbf{r}_\perp)), \quad (2б)$$

где \hat{F} — интеграл Кирхгофа—Френеля. Свойства этого отображения изучены еще менее, хотя ему в последнее время уделяется все большее внимание [20—22]. Отображения (2) уместно назвать нелокальными, так как они связывают значения огибающей волнового пакета $E_{n+1}(t, \mathbf{r}_\perp)$ в момент t и в точке \mathbf{r}_\perp не только с ее значениями в тот же момент и в той же точке при n -м проходе, как в локальных отображениях (1) (см. рис. 2), но и со значениями $E_n(t, \mathbf{r}_\perp)$ в соседних точках и в другие моменты времени (предшествующие в силу причинности [15]). В разделе 6 получены собственные нелинейные функции отображения (2б) для случая чисто пространственной модуляции. Эти собственные функции описывают поперечную структуру поля светового импульса, периодически проходящего через нелинейную среду и подвергающегося воздействию дифракции. Физически это рассмотрение соответствует анализу основной поперечной моды оптического резонатора с диссипативной нелинейностью.

Описание динамики волнового пакета посредством отображений (1), (2) подразумевает его последовательное прохождение через совокупность циклически повторяющихся элементов: нелинейный, диспергирующий и промежуток с дифракцией. Физическим образом таких отображений может быть не только радиофизический генератор [3] (см. рис. 1) или кольцевой лазер [9] (см. рис. 2): по-видимому, адекватной моделью может быть слоистая среда, каждому слою которой соответствуют последовательно нелинейность, дисперсия, дифракция (см. рис. 3). Возникает вопрос, что будет происходить, если устремить толщину каждого слоя к нулю? Интуитивно ясно, что в этом случае слоистая среда будет приближаться по своим свойствам к непрерывной. С математической точки зрения задача заключается в предельном переходе в нелокальном отображении (2б) таким образом, чтобы оно связывало не конечные изменения амплитуды волнового пакета (рис. 2), а бесконечно малые изменения. Такой предельный переход проделан в разделе 7, где из отображения (2б) получены уравнения в частных производных, вид которых определяется структурой операторов f , \hat{D} , \hat{F} .

2. Локальные отображения для систем с доминирующей нелинейностью

Отображение, рассмотренное в [8], связывает значения амплитуды электрического поля светового импульса в кольцевом лазере от прохода к проходу (см. рис. 2). Поскольку его длительность $\tau_n \sim 10 \div 100$ пс предполагается много меньшей времени обхода резонатора l/c (l — оптическая длина резонатора) и генерация однонаправленная, то интерференция в системе отсутствует и фазовые соотношения можно не учитывать. Дифракцией можно пренебречь в двух предельных случаях: в первом, когда число Френеля велико, $N = (a^2 k / l n) \gg 1$ (a — поперечный размер неоднородности импульса, k — волновое число, n — номер прохода через лазер); во втором $N \ll 1$, что соответствует одномодовой генерации, когда дифракция на каждом проходе очень сильна, быстро сглаживает все поперечные выбросы и формирует гладкое поперечное распределение (в этом случае для описания временных характеристик импульса достаточно отображения (2a)). Такое плосковолновое приближение, как указывалось в ряде работ [23, 24], дает удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

Будем предполагать также малость эффектов, связанных с временной дисперсией. Более точно, линейной дисперсией можно пренебречь при малой расстройке групповых скоростей U_1, U_2 волн $\delta\tau(U_1^{-1} - U_2^{-1}) \gg d$, в нелинейном элементе (генераторе гармоник или стоксовых компонент), незначительности дисперсионного распыливания $1/2 \delta\tau^2 (\partial^2 k / \partial \omega^2)^{-1} \gg d$, где d — оптическая толщина нелинейного элемента, $\delta\tau$ — длительность характерного выброса внутри временной структуры импульса. При генерации гармоник в нелинейных кристаллах дисперсионными эффектами можно пренебречь вплоть до длительностей $\delta\tau \geq 2$ пс (KDP), $\delta\tau \geq 10$ пс (LiNbO_3) на длине волны $\lambda = 1,06$ мкм [25], для вынужденного комбинационного рассеяния до $\delta\tau \geq 10$ пс (CS_2) [26] (толщина нелинейной среды $d = 1$ см). В этих условиях легко получить аналитические выражения, связывающие амплитуды поля на входе и выходе из нелинейного элемента в каждый момент времени. Локальное отображение (16) записывается тогда одним из следующих способов:

$$E_{n+1} = g(E_n)(1 - \text{th}(\sigma d g(E_n))), \quad (3)$$

$$E_{n+1} = g(E_n)(1 + \sigma^2 d^2 g^2(E_n))^{-1/2} \quad (4)$$

для генерации соответственно второй и третьей гармоник в условиях фазового синхронизма $\Delta K = 2K_1 - K_2 = 0$, где K_1, K_2 — волновые числа взаимодействующих волн;

$$E_{n+1} = g(E_n) \left(1 - a \text{sn} \left(\frac{\sigma d g(E_n)}{\sqrt{a}}, 1 - a^2 \right) \right),$$

$$a = 1/2 \left[2 + \frac{\Delta s^2}{4} + \left(\frac{\Delta s^4}{16} + \frac{\Delta s^2}{2} \right)^{1/2} \right], \quad \Delta s = \frac{\Delta K}{\sigma g(E_n)} \quad (5)$$

для генерации второй гармоники в отсутствие фазового синхронизма $\Delta K \neq 0$ [27], sn — эллиптический синус Якоби. Для нелинейных потерь на генерацию стоксовой компоненты отображение (16) принимает вид [9]

$$E_{n+1} = g(E_n) \left\{ \frac{g^2(E_n) + I_s(0)}{g^2(E_n) + I_s(0) \exp[\sigma d (g^2(E_n) + I_s(0))]} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где σ — коэффициент нелинейной связи стоксовых компонент, $I_s(0)$ — интенсивность стоксовой компоненты на входе в нелинейный элемент.

Символ $g(E_n)$ в выражениях (2)–(6) описывает нелинейное усиление и насыщающееся поглощение (см. рис. 2). Такая запись подразумевает безынерционность лазерной среды, что справедливо при временах $\delta\tau \gg T_1, T_2$ [9]. Использование быстрорелаксирующих красителей позволяет удовлет-

ворить этому условию при $\delta t \gtrsim 10$ пс, поскольку измерения времени T_1 дают величины $T_1 \gtrsim 4$ пс [28], в то время как времена T_2 существенно меньше.

В этих условиях уравнения двухуровневой среды легко интегрируются и дают решение в неявном виде для поглотителя [9]:

$$E' \exp[\sigma_{\text{II}} T_{\text{II}} E'^2] = E_n \sqrt{R} \exp(-\sigma_{\text{II}} N_{\text{II}} d_{\text{II}}) \exp(\sigma_{\text{II}} T_{\text{II}} E_n^2 R), \quad (7)$$

а для усилителя:

$$g(E_n) \exp(\sigma_{\text{IY}} T_{\text{IY}} g^2(E_n)) = E' \exp(\sigma_{\text{Y}} N_{\text{Y}} d_{\text{Y}}) \exp(\sigma_{\text{Y}} T_{\text{IY}} E'^2), \quad (8)$$

где $\sigma_{\text{II, Y}}$ — сечение вынужденного поглощения (усиления), $N_{\text{II, Y}}$ — концентрация поглощающих (усиливающих) частиц, $T_{\text{II, Y}}$ — время продольной релаксации поглотителя (усилителя), E' — поле между усилителем и поглотителем. Совместное решение уравнений (7) и (8) дает зависимость $g(E_n)$ и анализируется в разделе 3.

Отображения (3)–(8) являются одномерными и в границах своей применимости описывают чисто амплитудную модуляцию волнового пакета. Для учета фазовой модуляции необходимо использовать двумерные отображения, полученные, например, в [6, 7], где анализировались нелинейно оптические интерферометры с так называемой дисперсионной бистабильностью. Они представляют собой оптический резонатор, заполненный средой с нелинейным (обычно керровским) показателем преломления. Для простоты записи формул ограничимся кольцевой геометрией. Пренебрегая дифракцией, что возможно либо для больших чисел Френеля, либо при крайне малых (что достигается, например, в одномодовом световоде [7]), легко получить двумерное отображение, связывающее амплитуды поля от прохода к проходу:

$$E_{n+1} = \sqrt{T} E_{in} + \sqrt{R} E_n \exp(ikn_0 l + ik dn_2 |E_n|^2), \quad (9)$$

где T, R — коэффициенты прохождения и отражения входного сигнала, E_{in} — амплитуда входного сигнала, $n_2 |E_n|^2$ — нелинейная добавка к показателю преломления [7].

3. Модуляционные свойства локальных отображений

Рассмотрим отображения (3)–(8), осуществляющие чисто амплитудную модуляцию. Начнем с последних двух, так как их анализ позволяет провести сравнение с известными результатами для двухкомпонентной лазерной среды с насыщением по интенсивности [29]. В данной работе двухкомпонентная среда моделируется последовательно расположенными насыщающимися поглотителем и усилителем (см. рис. 2 без элемента с пиковыми потерями). Графики отображений приведены на рис. 4, а и 4, б соответственно. Для них характерны линейное поглощение (усиление) при малых интенсивностях и их последующее насыщение, приводящее к свободному прохождению импульса через среду. В режиме синхронизации мод [29], когда поглощающая среда насыщается раньше усиливающей $\sigma_{\text{II}} T_{\text{II}} \gtrsim \sigma_{\text{Y}} T_{\text{IY}}$ и препятствует усилению ненасыщающегося сигнала $\sigma_{\text{II}} N_{\text{II}} d_{\text{II}} \gtrsim \sigma_{\text{Y}} N_{\text{Y}} d_{\text{Y}}$, совместное действие отображений (7) и (8) представляется графиком рис. 4, в. Из него видно, как при малых интенсивностях доминирует поглощение, при умеренных — усиление, а когда и оно насыщается, остаются лишь нерезонансные потери (например, на зеркалах), которые учитываются в коэффициенте отражения R .

Отображение (7), (8) обладает тремя стационарными точками, которые получаются при пересечении графика на рис. 4, в прямой с единичным наклоном $E_{n+1} = E_n$ (штриховая линия). Средняя из них $E_{\text{пор}}$ неустойчива, так как в ней $dE_{n+1}/dE_n \approx R \exp(\sigma_{\text{Y}} N_{\text{Y}} d_{\text{Y}}) > 1$. Это означает, что значения E_n , меньшие $E_{\text{пор}}$ [12], затухают до нуля, который является устойчивой стационарной точкой, а большие — возрастают. Этот же вывод был сделан из несколько других предпосылок в [29] (анализировались не соотношения между амплитудами на входе и выходе, а коэффициенты усиления на единицу

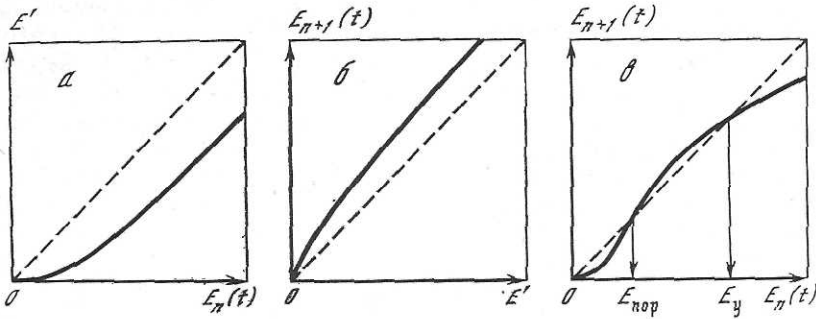


Рис. 4. Нелинейные преобразования амплитуды электрического поля E_n

a — безынерционный двухуровневый поглотитель, E_n — поле на входе, E' — на выходе; *б* — безынерционный двухуровневый усилитель, E' — поле на входе, $g(E_n) = E_{n+1}(t)$ — на выходе; *в* — совместное действие усилителя и поглотителя (без элемента с пиковыми потерями H (рис. 2))

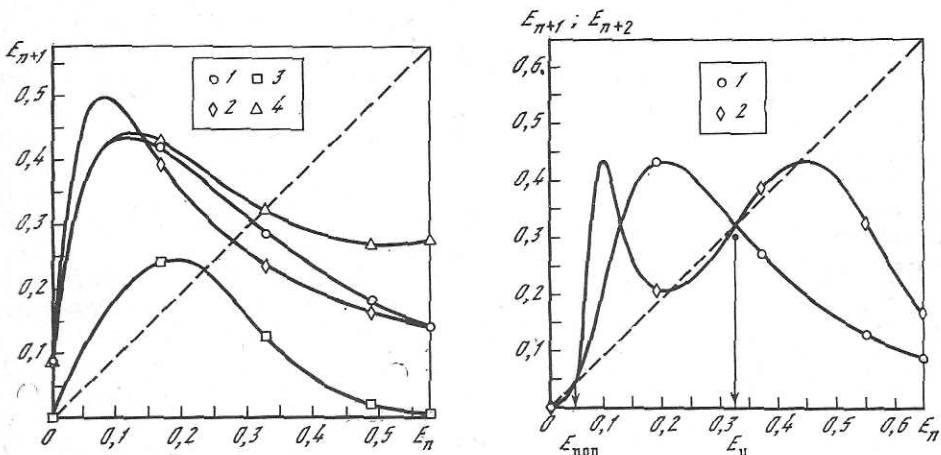


Рис. 5. Нелинейное преобразование амплитуды электрического поля $E_n(t)$ в кольцевом лазере для различных видов нелинейных потерь

1 — 2-я гармоника в условиях фазового синхронизма, отображение (3); 2 — 3-я гармоника в тех же условиях, отображение (4); 3 — генерация 1-й стоксовой компоненты при ВКР, отображение (6); 4 — 2-я гармоника при фазовой расстройке $\Delta K = 0,1 \text{ см}^{-1}$, отображение (5)

Рис. 6. Нелинейное преобразование амплитуды электрического поля в кольцевом лазере с генератором второй гармоники в условиях фазового синхронизма (отображение (3))

1 — через один проход $E_{n+1} = f(E_n)$; 2 — через два прохода $E_{n+2} = f(f(E_n))$

длины), где отмечалось, что двухкомпонентная среда является пороговым элементом, пропускающим импульсы с амплитудой больше $E_{\text{пор}}$. В работе [30] это свойство использовано для выделения и усиления отдельного выброса внутри временной структуры ультракороткого импульса.

Вторая стационарная точка E_y отображения (7), (8) устойчива, так как в ней $dE_{n+1}/dE_n \approx R < 1$. В результате значения $E_n > E_{\text{пор}}$ стремятся к E_y и импульс под воздействием отображения приобретает прямоугольную форму. Очевидно, что это будет происходить до тех пор, пока не скажется влияние диспергирующих элементов, для учета которых необходимо рассматривать нелокальные отображения (см. раздел 5).

Теперь рассмотрим режимы, когда E_y теряет устойчивость. Это происходит в тех случаях, когда $|dE_{n+1}/dE_n| > 1$, что имеет место для отображений (3), (5), (6) (для отображения (4) легко показать, что E_y всегда устойчива) Для этих отображений, имеющих гладкий квадратичный максимум (рис. 5) вступает в силу известный сценарий удвоения числа устойчивых точек (удвое-

ния периода) [12—14, 31]. Вместо E_y появляются три стационарные точки из произведения отображений $E_{n+2} = f(f(E_n))$, две из которых первоначально устойчивы (см. рис. 6). Как показано в [4, 8], это соответствует восстановлению формы импульса спустя два прохода через систему. При дальнейшем увеличении коэффициента усиления $G = \sigma_y N_y d_y$ происходит удвоение числа устойчивых точек в соответствии с теорией универсальности [8, 9, 12—14, 31] и при превышении определенного значения $G_{кр}$ число их становится бесконечным, что отвечает хаотической модуляции волнового пакета (см. раздел 4).

Рассмотрим особенности бифуркаций удвоения для отображений (3), (5), (6) [9]. В отличие от «логистического отображения» [14, 31]

$$x_{n+1} = 4bx_n(1 - x_n), \quad (10)$$

отображающего отрезок $[0, 1]$ в себя, (3)—(6) отображают в себя полуось $[0, \infty)$. Это приводит к тому, что их бифуркационные диаграммы более «вытянуты» по сравнению с «логистическим отображением» (рис. 7 для (3)) и на них лучше различимы окна периодического движения среди хаоса, расположение которых подчиняется известной теореме Шарковского [32]. Как следствие этой вытянутости скорость сходимости бифуркационных значений G_m к точке хаоса при малых m не столь высока, как для (10) [12], и вычисление универсального числа δ по первым бифуркационным значениям $\delta_m = (G_{m+1} - G_m)/(G_{m+2} - G_{m+1})$, $m = 1, 2, \dots$, дает при малых m значения, заметно отличающиеся от δ . Кроме того, значения G_m для (3), (5), (6) довольно заметно отличаются друг от друга и сильно зависят от параметров отображений. На рис. 8 приведены бифуркационные диаграммы для отображения (5) при постепенном увеличении фазовой расстройки $\Delta K = 0 \div 0,2 \text{ см}^{-1}$. С ростом ΔK значения бифуркационного коэффициента усиления растут. Это связано с тем, что происходит расстройка источника нелинейных потерь (генератора гармоник) и они медленнее увеличиваются с интенсивностью [9]. На рис. 8, а этому соответствует уменьшение производной в стационарной точке с ростом ΔK , приводящее к увеличению бифуркационного значения G_1 .

Для отображения (6) аналогичным параметром является начальный стоксов сигнал $I_s(0)$. Если он оказывается на уровне спонтанного шума $I_s(0) = (10^{-8} \div 10^{-10}) E_n^2$, то для развития первой стоксовой компоненты до уровня сигнала E_n^2 необходим инкремент усиления $\sigma d E_n^2 \simeq 20 \div 30$ [33]. При этом наблюдается чрезвычайно резкий рост нелинейных потерь при превышении порогового значения, что характерно для вынужденного рассеяния из спонтанных шумов: график отображения (6) имеет при этом практически треугольную форму, а бифуркационные значения расположены неразлично близко, так как график пересекает прямую с единичным наклоном практически вертикально. Если постепенно увеличивать начальный стоксов сигнал, то пороговая величина инкремента падает, нелинейные потери растут медленнее (рис. 9, а), график отображения становится все более пологим, а бифуркационные значения все более различимыми (см. бифуркационную диаграмму рис. 9, б).

По-видимому, аналогичным образом можно учитывать и нелинейные потери на взрывное поглощение [34], динамика которого подвергается интенсивному изучению.

Двумерное отображение (9) обнаруживает гораздо более богатые бифуркационные возможности, чем отображения (3)—(8). По-видимому, наиболее полная картина обрисована в [35]: здесь и бифуркации удвоения периода, и рождения цикла, и гистерезисные явления.



Рис. 7. Зависимость устойчивых стационарных значений E_y отображения (3) от критического параметра GR (бифуркационная диаграмма при $\Delta K = 0$)

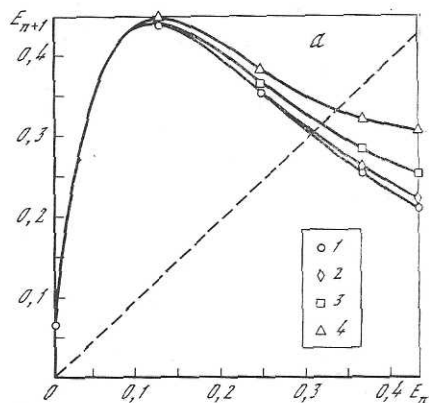
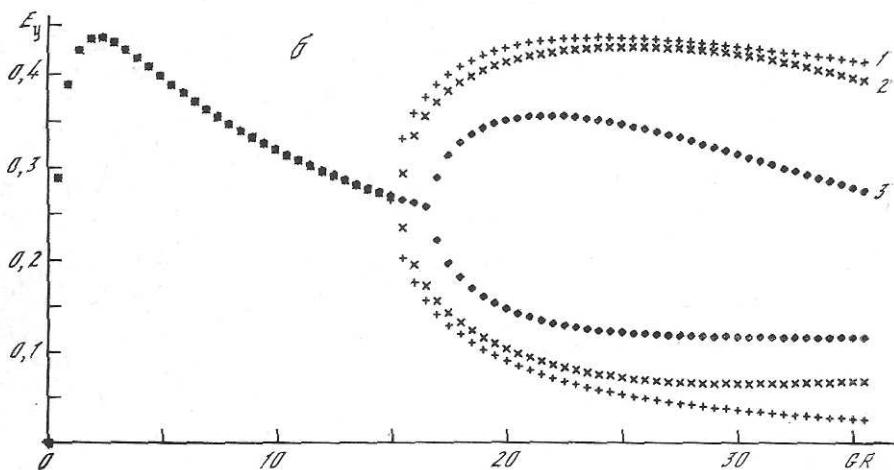


Рис. 8. Графики отображений (5) для различных величин фазовой расстройки (а) и бифуркационные диаграммы для тех же отображений (б)

1—4: $\Delta K = 0$ (1); $0,12 \text{ см}^{-1}$ (2); $0,24$ (3); $0,36$ (4)



4. Пространственно-временная автомодуляция

Отображение (1а) не учитывает зависимости амплитуды волнового пакета E_n и параметров системы (например, коэффициента усиления G или фазовой расстройки ΔK) от поперечных координат $r_{\perp} = (x, y)$. Однако именно эта зависимость, как показано в [9], приводит к весьма любопытному результату: пространственно-временной автомодуляции. Отметим, что случай чисто пространственной модуляции в одном измерении впервые рассмотрен в [6].

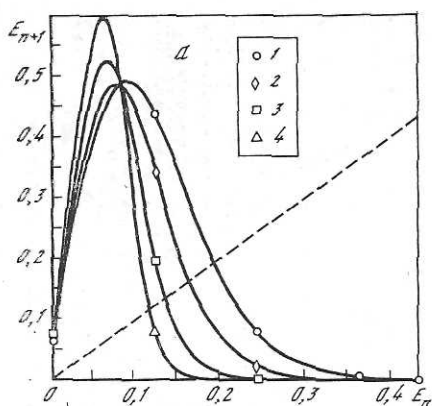
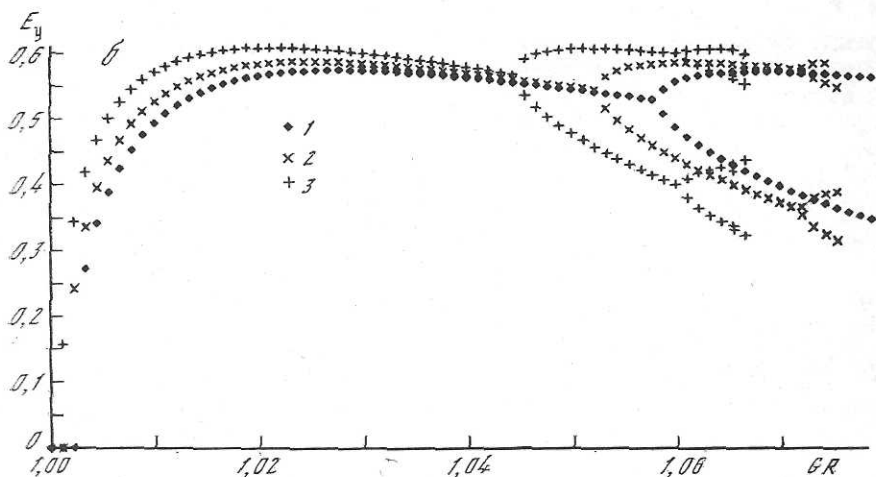


Рис. 9. Графики отображения (6) для различной величины начального стокового сигнала $I_s(0)$ и инкремента ВКР g_R (а) и бифуркационные диаграммы для тех же отображений (б)

1 — $I_s(0) = 0,0125$, $g_R = 4,38$.
 2 — $0,00625$; $5,08$. 3 — $0,003125$; $5,77$.
 4 — $0,001563$; $6,46$



Рассмотрим распространение двумерного гауссова импульса (рис. 2), амплитуда E_n которого в момент t зависит от поперечных координат $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$. (Аналогично по одной из осей можно откладывать зависимость от времени $t - z/c$.) Связь между значениями амплитуды поля E_n и E_{n+1} осуществляется локальным отображением (16). В качестве последнего будем рассматривать произведение отображений (3), (7), (8), что соответствует преобразованию импульса в кольцевом лазере, включающем насыщающиеся усилитель и поглотитель и преобразователь во вторую гармонику в условиях синхронизма (см. раздел 2). Рассмотрим сначала режим с $G = \sigma_y N_y d_y = 10$, что соответствует устойчивой генерации, когда формируется импульс с амплитудой, равной устойчивому значению отображения (3). На рис. 10 видно, как последовательные проходы через лазер (итерации отображения (16)) формируют столбобразную структуру. Отметим, что значения амплитуды, меньшие пороговой $E_{\text{пор}}$ (см. раздел 3), затухают, благодаря чему импульс ограничен в пространстве и во времени.

В результате первой бифуркации удвоения, когда $G > G_1$, характер модуляции меняется: у произведения отображений появляются две устойчивые стационарные точки — уровни модуляции. На рис. 11 видно, как после одного прохода в точках с относительно высокой начальной амплитудой из-за значительного преобразования в гармонику огибающая «проваливается», в то время как в точках с относительно малой амплитудой преобразование в гармонику незначительно и амплитуда $E_2(t, \mathbf{r}_\perp)$ возрастает. При последующих проходах значения амплитуды стремятся к уровням модуляции отображения (3). После восьми проходов (рис. 11) формируется характерная кольцеобразная (влияние начальных условий) структура с практически

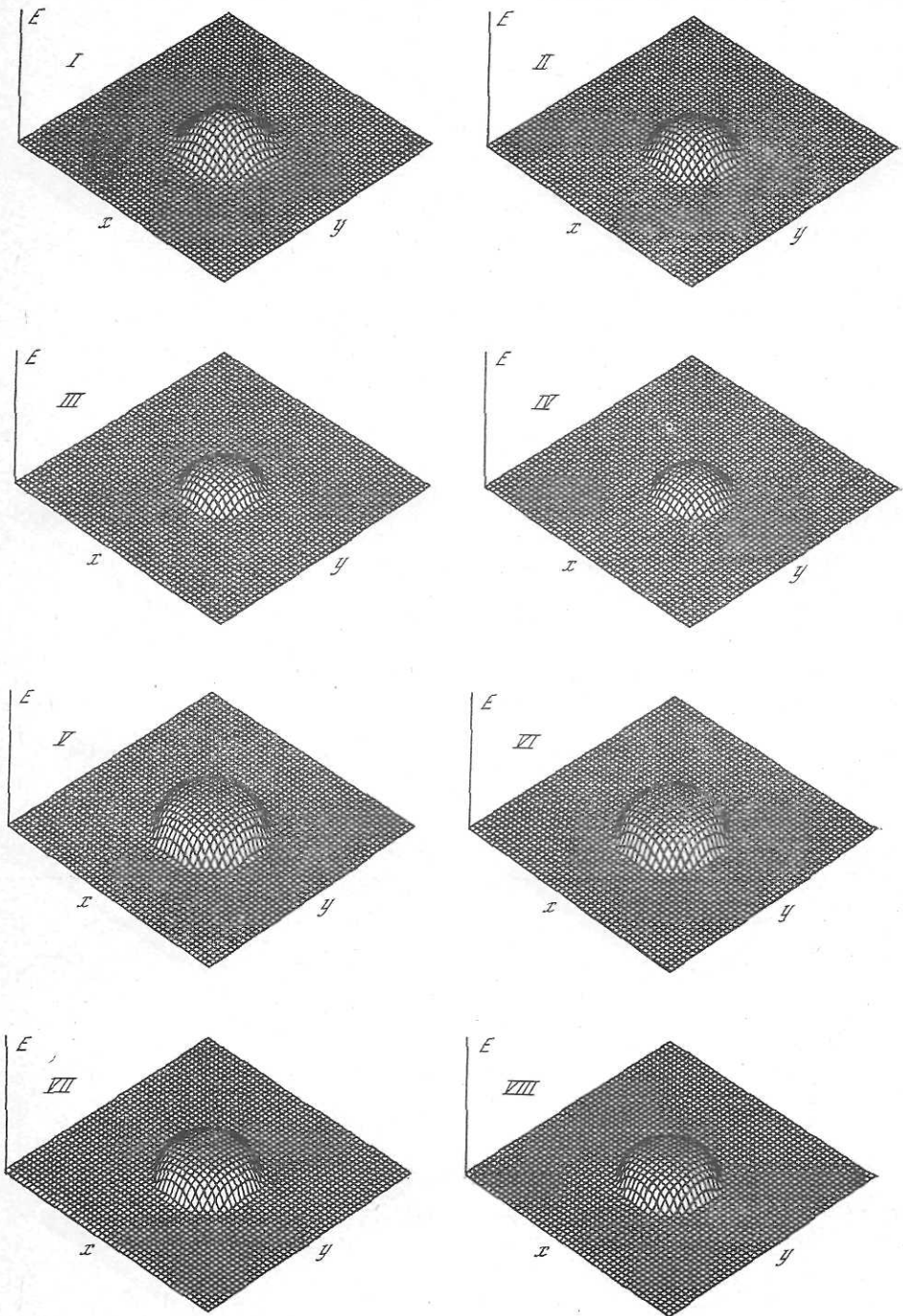


Рис. 10. Формирование пространственно-временной структуры импульса в случае одного устойчивого значения у отображения (3)

Римские цифры I—VIII означают номер прохода

плоскими вершинами, которые от прохода к проходу меняются местами. При этом в силу пренебрежения дифракцией (см. разделы 2 и 6) происходит заметное увеличение крутизны огибающей в районе перехода от одного уровня модуляции к другому. Этот процесс приводит к уменьшению эффективной поперечной неоднородности δa , уменьшает эффективное число Френе-

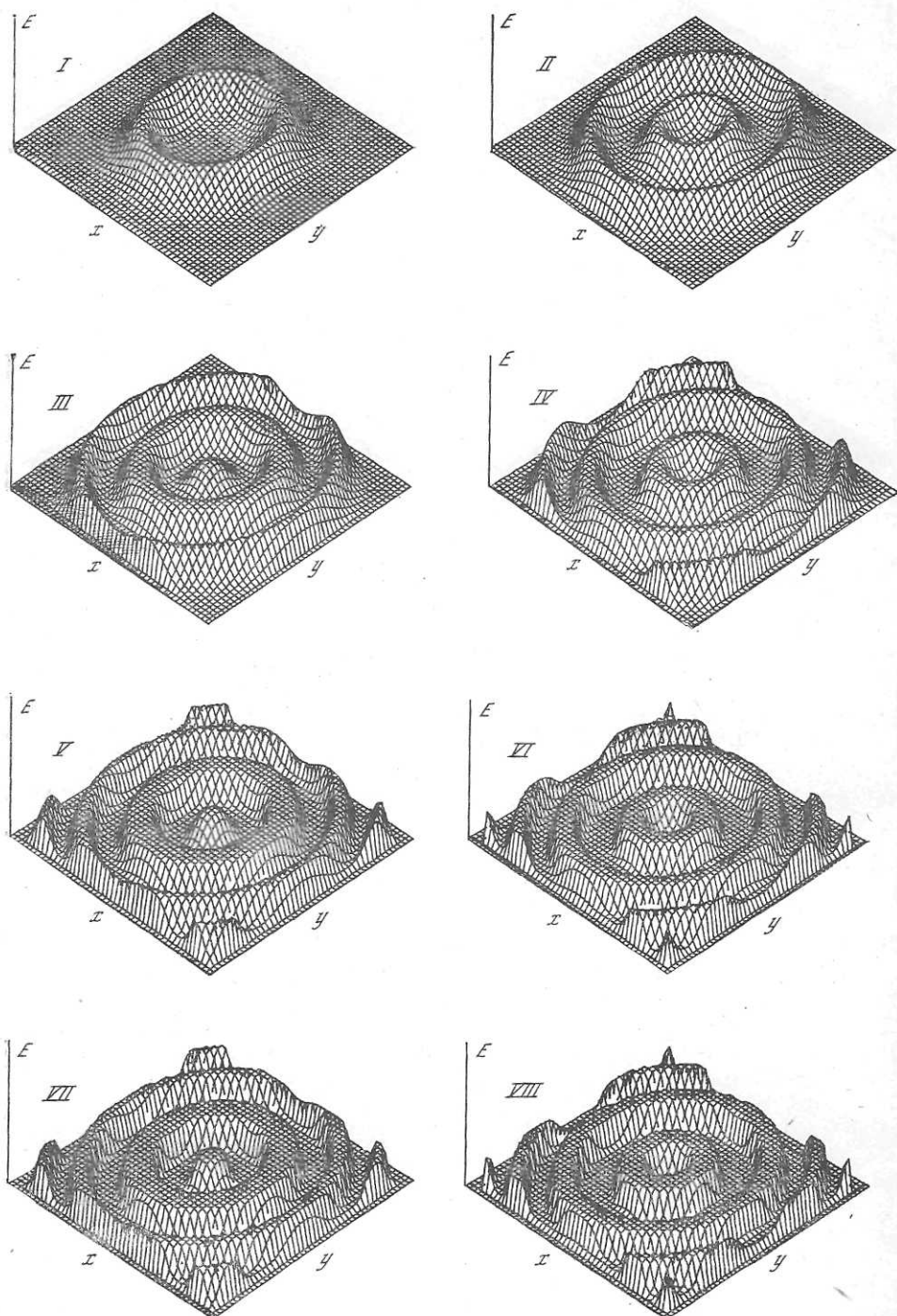


Рис. 11. Пространственно-временная структура импульса для двух устойчивых значений отображения (3)

I-VIII — итерации с первой по восьмую

ля N и, следовательно, ограничивает применимость локального отображения (16).

Поведение огибающей при большем значении критического параметра G иллюстрируется рис. 12. После первых двух проходов форма огибающей качественно не отличается от случая двухуровневой модуляции, хотя абсолют-

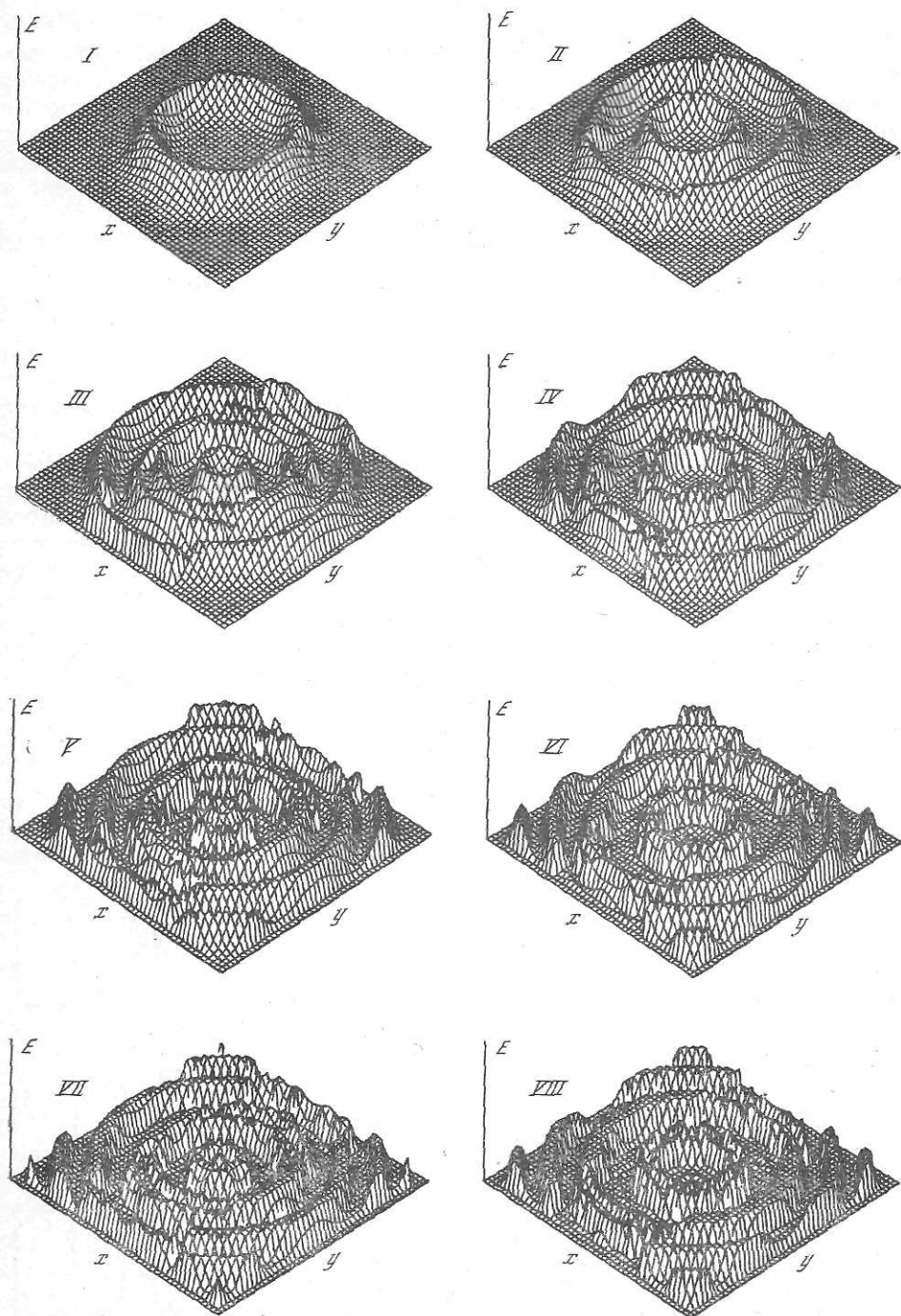


Рис. 12. Пространственно-временная структура импульса для неоднородного по оси z распределения коэффициента усиления

В центре $G = 56$, по краям $G = 26$ (сосуществование регулярной и хаотической автомодуляции). I—VIII — итерации с первой по восьмую

ные значения интенсивностей в максимумах заметно выше. При последующих проходах начинает сказываться наличие большего числа уровней модуляции. В приведенном примере в центральной части поперечного сечения импульса число уровней бесконечно и соответствует хаотической модуляции

($G = 56$). В результате уже к шестому проходу огибающая близка к случайной и характеризуется большим числом выбросов различной величины. В то же время на краях усиливается регулярная структура, аналогичная изображенной на рис. 11 с двумя уровнями модуляции ($G = 26$). Этот пример показывает, что простое описание эволюции волнового пакета (лазерного импульса) одномерным отображением с параметрами, зависящими от поперечных координат, приводит к внешне сложной пространственно-временной динамике.

5. Влияние дисперсии на временную модуляцию

Результаты предыдущего раздела показывают, что огибающая волнового пакета под воздействием бездисперсионной нелинейности преобразуется таким образом, что значения амплитуды E_n стремятся к дискретной совокупности устойчивых значений. Как следствие, временная огибающая в регулярном случае приобретает ступенчатую форму, а в хаотическом характеризуется наличием большого числа всплесков различной величины со случайными перепадами амплитуды (рис. 13). Наличие столь резких перепадов приводит к значительному уширению спектра импульса по сравнению с исходным. Вместе с тем в реальных системах ширина спектра ограничивается: в радиофизических системах благодаря наличию фильтров, конечного времени установления нелинейности; в оптических системах благодаря эффектам конечной ширины линии, зависимости коэффициента отражения зеркал от частоты, инерционности нелинейности и т. д. В общем виде их наличие можно учесть следующим образом: к нелинейному элементу, описываемому

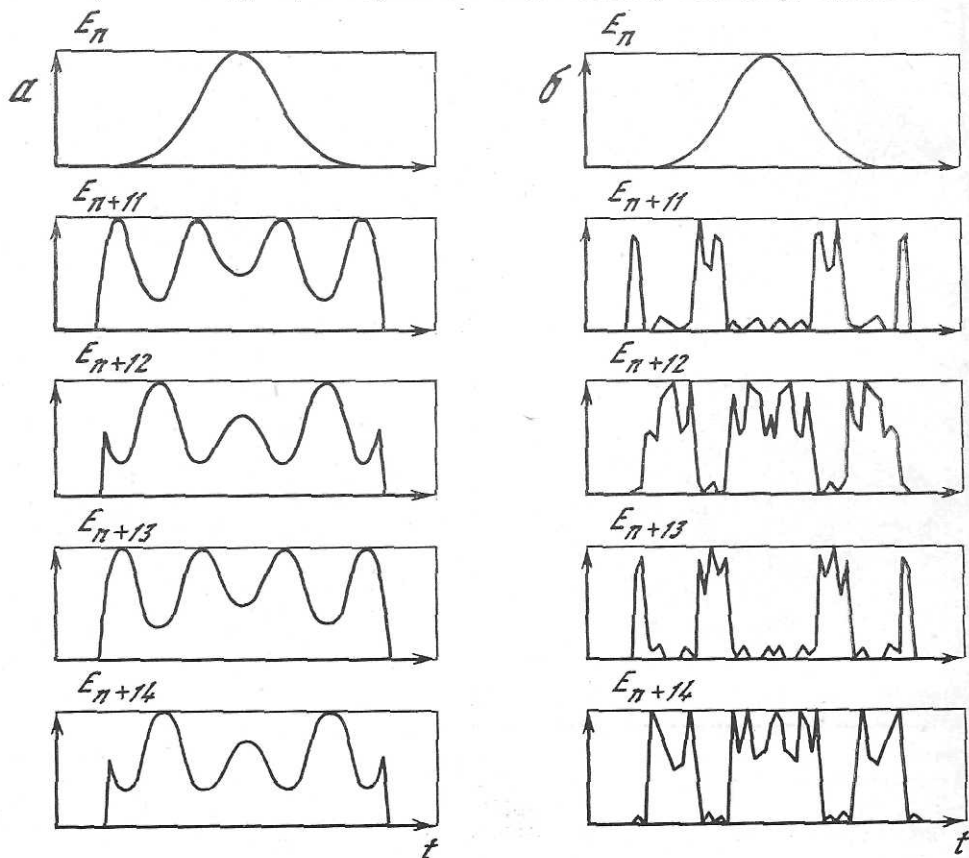


Рис. 13. Временная структура импульса в бездисперсионном недиспергирующем лазере
 а — $G = 26$ (период 2, рис. 11); б — $G = 56$ (хаос, рис. 12)

отображением f , добавляется линейный фильтр, описываемый оператором типа свертки \hat{D} : получается отображение (2а), которое в общем виде выглядит [3]

$$E_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) f(E_n(\tau)) d\tau, \tag{11}$$

где $g(t - \tau)$ — импульсная переходная функция фильтра, преобразование Фурье от которой определяет частотную характеристику фильтра.

Уравнение (11) изучалось в ряде работ и содержит весьма богатую динамику, как регулярную, так и хаотическую. Для случая слабой нелинейности в [3] получены периодические решения. Случай сильной нелинейности численно исследовался в [4], где получены как регулярные, так и хаотические колебания. В настоящем разделе будут получены нелинейные собственные функции этого отображения. Физически им соответствуют импульсы, распространяющиеся в системе без изменения своей формы. Чтобы это имело место, необходимо в точности компенсировать действие нелинейности, обостряющей фронты, влиянием дисперсии, их сглаживающей. Для получения замкнутого решения рассмотрим случай, когда вносимые в форму импульса изменения являются при каждом проходе величинами одного порядка малости.

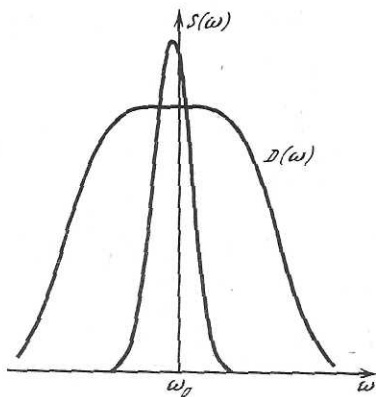


Рис. 14. К вычислению свертки (13)

Спектр $D(\omega)$ передаточной функции диспергирующего элемента $g(t)$ вблизи максимума спектра сигнала $S(\omega)$ аппроксимируется параболой

Сначала заменим выражение для оператора \hat{D} более простым, которое адекватно случаю слабой дисперсии [36]. Пусть оператор \hat{D} действует на сигнал $S(t)$ со спектром $S(\omega)$, более узким, чем частотная характеристика $D(\omega)$ оператора \hat{D} :

$$\hat{D}S(t) = \int_{-\infty}^t g(t - \tau) S(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} D(\omega) S(\omega) d\omega. \tag{12}$$

Тогда в подынтегральном выражении $D(\omega)$ меняется медленно, а $S(\omega)$ быстро, что позволяет разложить $D(\omega)$ в ряд по степеням $\omega - \omega_0$, где ω_0 — несущая частота сигнала $S(t)$. На рис. 14 видно, как это разложение соответствует аппроксимации $D(\omega)$ параболой:

$$\hat{D}S(t) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} S(\omega) \left(1 - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2} \right) d\omega. \tag{13}$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании интеграла Фурье [37], получаем следующее выражение для формы сигнала, прошедшего через слабодиспергирующий элемент:

$$\hat{D}S(t) = S(t) + \frac{1}{2\Delta\omega^2} \frac{\partial^2 S(t)}{\partial t^2}. \tag{14}$$

Приступаем к вычислению собственной функции отображения (11). С учетом (14) оно имеет вид

$$E_{n+1}(t) = f(E_n(t)) + \frac{1}{2\Delta\omega^2} \frac{\partial^2 f(E_n(t))}{\partial t^2}. \tag{15}$$

Поскольку выше мы предположили, что нелинейность $f(E_n(t))$ влияет на